УДК 532.546

А. А. Юрова, А. В. Юров, И. В. Лукиных

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ПОСТРОЕНИЯ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ДВУМЕРНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Предложен простой алгебраический метод построения точных решений уравнений двумерной гидродинамики несжимаемой жидкости. В случае невязкой жидкости задача сводится к последовательному решению трех линейных дифференциальных уравнений в частных производных, а в случае вязкой — к решению трех линейных дифференциальных уравнений в частных производных и одного обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка.

We propose a simple algebraic method for constructing exact solutions of equations of two-dimensional hydrodynamics of an incompressible fluids. The problem reduces to consecutively solution three linear partial differential equations for a nonviscous fluid and to solving three linear partial differential equations and one first-order ordinary differential equation for a viscous fluid.

Ключевые слова: двумерная несжимаемая жидкость, точные решения.

Key words: two-dimensional incompressible fluid, exact solutions.

Динамика несжимаемых вязких потоков жидкости описывается уравнениями Навье — Стокса (НС). В режиме больших чисел Рейнольдса возникает турбулентность — одна из важнейших нерешенных задач теоретической и математической физики. Результаты Като показывают, что двумерные $(2D)$ уравнения НС глобально определены в $C^0([0,\infty]; H^s(R^2))$, при $s>2$ и при $0<T<\infty$ слабое решение уравнений $2DHC$ стремится к решению 2*D*-уравнения Эйлера в $C^0([0,T]; H^s(R^2))$[1]. В свою очередь, уравнение $3DHC$ локально определено в $C^0([0,\tau]; H^s(R^2))$, при $s>5/2$ и аналогично предыдущему его слабые решения приближаются к решениями 3*D*-уравнения Эйлера $C^0([0,\tau]; H^s(R^3))$, где τ определяется начальными данными (нормой) и внешними силами [2; 3]. Невязкий предел интенсивно исследовался в работах [4; 5]. Среди важнейших результатов можно отметить факт гамильтоновости $2D$-уравнений Эйлера, доказанный Арнольдом [6], и результаты исследования симплектической структуры этих уравнений [7]. В работах [8] и [9] было найдено представление пары Лакса для $2D$-уравнения Эйлера, записанное в эйлеровых переменных. Позднее было построено представление Лакса и в евклидовых переменных [10].

Вестник Балтийского федерального университета им. И. Канта. 2013. Вып. 4. С. 12 – 17.

В настоящей работе мы описываем удивительно простой, но эффективный метод построения точных решений уравнений двумерной гидродинамики несжимаемой жидкости, применимый как к невязкой (уравнения Эйлера), так и вязкой жидкости (уравнения НС).

Рассмотрим двумерную невязкую жидкость. Две компоненты скорости v_x и v_y выражаются через функцию тока $\psi = \psi(t, x, y)$ по формулам

$$v_x = \frac{\partial\psi}{\partial y}, v_y = \frac{\partial\psi}{\partial x}, \tag{1}$$

так что выполняется уравнение неразрывности $div\bar{v} = 0$. В этих переменных двумерное уравнение Эйлера принимает вид

$$\frac{\partial\Delta\psi}{\partial t} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial\Delta\psi}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\Delta\psi}{\partial y} = 0, \tag{2}$$

где Δ означает двумерный лапласиан [11]. Равенство (2) представляет собой нелинейное уравнение, которое не относится к числу так называемых интегрируемых (несмотря на наличие представления Лакса). Тем не менее для него можно развить процедуру построения точных решений.

Теорема. Пусть ψ – гармоническая в области D функция: $\Delta\psi = 0$, где Δ – двумерный лапласиан. Пусть теперь $F = (t, x, y)$ – решение переопределенной системы линейных дифференциальных уравнений

$$\Delta F = kF, \ \frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d\ln k}{dt}F, \tag{3}$$

где $k(t)$ – некоторая функция времени. Тогда функция

$$\psi_1 = \psi + F \tag{4}$$

удовлетворяет в D уравнению (2), т.е.

$$\frac{\partial\Delta\psi_1}{\partial t} + \frac{\partial\psi_1}{\partial y}\frac{\partial\Delta\psi_1}{\partial x} - \frac{\partial\psi_1}{\partial x}\frac{\partial\Delta\psi_1}{\partial y} = 0.$$

Справедливость теоремы проверяется прямым вычислением. В дальнейшем будем ссылаться на выражения (3) и (4) как процедуру «одевания» $D = 2$ уравнений Эйлера. Преобразование (4) похоже на преобразование Дарбу (ПД), применяемое в теории интегрируемых систем. Суть ПД заключается в нахождении решения пары Лакса ψ с заданным «затравочным» потенциалом (который, в свою очередь, является решением исследуемого нелинейного уравнения) и последующем использовании этого ψ для нахождения новых потенциалов.

Сродство ПД с описанным выше преобразованием очевидно. В самом деле, в качестве промежуточного шага необходимо решать два линейных уравнения с переменными коэффициентами (3), зависящими от гармонической функции ψ, которая может считаться «затравочным» потенциалом, поскольку удовлетворяет уравнению (2) и описывает плоское (стационарное, если ψ не зависит от t) потенциальное течение. Новая функция тока ψ_1 (4) будет уже описывать нестационарное течение с завихренностью.

Тем не менее это не преобразование Дарбу, поскольку линейная система (3) не является $[L, A]$ — парой уравнения Эйлера (2). Условие совместимости уравнений (3) имеет вид

$$\Delta\theta - k\theta = \frac{dk}{dt}F, \tag{5}$$

где $\theta = \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial x}$. Используя (3) и факт гармоничности ψ, можно переписать условие (5) в другом виде:

$$\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right)\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y} + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y} = \frac{1}{2}\frac{dk}{dt}F\,. \tag{6}$$

Замечание. В систему (3) входит вспомогательная функция времени $k = k(t)$. Ее величина не фиксирована, а определяется формой гармонической функции ψ. В частности, не для всякой гармонической ψ система (3) совместна, т.е. не для всякой ψ существует $k = k(t)$ такая, что система (3) имеет решение. Сейчас мы покажем, этот элементарный подход неожиданно оказывается достаточно эффективным для построения точных решений двумерного уравнения Эйлера.

Рассмотрим гармоническую функцию в виде $\psi_N = X_N A_N Y_N$, где A_N — постоянная $(N+1)\times(N+1)$ матрица с элементами a_{ik}, а i и k пробегают от нуля до N. Вид матрицы A_N определяется путем подстановки ψ_N в уравнение $\Delta\psi_N = 0$. Ниже мы приводим несколько примеров матриц при различных N:

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} \\ a_{10} & a_{11} \end{pmatrix},\quad A_2 = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & 0 \\ -a_{02} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{30} \\ a_{10} & a_{11} & -3a_{30} & a_{13} \\ -a_{02} & -3a_{03} & 0 & 0 \\ a_{30} & -a_{13} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{30} & a_{04} \\ a_{10} & a_{11} & -3a_{30} & a_{13} & 0 \\ -a_{02} & -3a_{03} & -6a_{04} & 0 & 0 \\ a_{30} & -a_{13} & 0 & 0 & 0 \\ a_{04} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Число свободных параметров $M(N)$ (т.е. число независимых элементов в матрицах A_N) определяется следующим образом: если N нечетное число, то $M(N) = 2(N+1)$, а если N четное число, то $M(N) = 2N+1$. Такая функция тока служит лишь вспомогательным средством для вычисления поля скоростей. Поскольку после дифференцирования по пространственным переменным коэффициент a_{00} обращается в нуль, не теряя общности, можно положить $a_{00} = 0$, что мы и будем подразумевать в дальнейшем. Остальные коэффициенты следует рассматривать как функции времени $a_{ij} = a_{ij}(t)$. Подставляя ψ_N в систему дифференциальных уравнений (3), находим функцию F, после чего по формуле (4) вычисляем соответствующую $\psi_{1,N}$.

В качестве простого примера положим $a_{11} = const$ и $a_{02} = const$. Производя вышеуказанные вычисления, находим

$$a(t) = a_0 \cos \omega t, \quad b(t) = -\frac{a_0}{2a_{02}}\left(a_{11} \cosh \omega t + \omega \sinh \omega t\right),$$

где a_0 — постоянная интегрирования, а $\omega = \sqrt{a_{11}^2 + 4a_{02}^2}$. Что же до $c(t)$, то удобно считать $a_{10}(t)b(t) = a_{01}(t)a(t)$, что дает $c = const$, причем можно без потери общности, выбрать $c = 0$. Отметим, что решение (10) не сингулярно, а $k(t) = -a^2(t) - b^2(t)$. Тем же самым методом можно строить и решения, описывающие потенциальные течения.

Вышеописанная методика легко обобщается на случай двумерного течения несжимаемой вязкой жидкости, описываемой уравнением

$$\frac{\partial \Delta\psi}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial \Delta\psi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial \Delta\psi}{\partial y} = \nu \Delta^2 \psi, \quad (8)$$

где ν — кинематическая вязкость. Пусть ψ — гармоническая в области D функция: $\Delta\psi = 0$. Пусть теперь $F(t,x,y)$ — решение переопределенной системы нелинейных дифференциальных уравнений

$$\Delta F = u(t)F, \quad \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial x} + U(u)F, \quad (9)$$

где $u(t)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial u(t)}{\partial t} + uU(u) = \nu u^2, \tag{10}$$

а $U(u)$ — произвольная функция от своего аргумента. Тогда функция $\psi_1 = \psi + F$ удовлетворяет в D уравнению (8):

$$\frac{\partial \Delta \psi_1}{\partial t} + \frac{\partial \psi_1}{\partial y}\frac{\partial \Delta \psi_1}{\partial x} - \frac{\partial \psi_1}{\partial x}\frac{\partial \Delta \psi_1}{\partial y} = \nu \Delta^2 \psi_1.$$

В качестве простейшего примера рассмотрим «одевание» на нулевом фоне $\psi = 0$. Решая систему (9), находим

$$\psi_1 = Ke^{-\nu\left(a^2+b^2\right)t}\left(C_1 \sin\left(ax+by\right) + C_2 \cos\left(ax+by\right)\right),$$

где $K, a, b, C_{1,2}$ — произвольные постоянные. Разумеется, это простое и известное решение. Мы привели его только для демонстрации работоспособности метода.

Теперь рассмотрим случай $N = 1$. По аналогии с уравнением (8) можно построить решение (9) вида

$$\psi_1 = A(t)\left(y \sin\alpha(t) + x\cos\alpha(t)\right) + \xi_1(t)\sin g + \xi_2(t)\cos g, \tag{11}$$

где $g = R\left(x\cos\phi + y\sin\phi + f(t)\right)$, $U(u) = \nu u$; $u = -R^2 = const$; $A(t), \alpha(t), f(t)$ — произвольные функции; ϕ — произвольная постоянная, а функции $\xi_1(t), \xi_2(t)$ ищутся из системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d\xi_1(t)}{dt} = -\nu R^2 \xi_1 + R\left(\frac{df(t)}{dt} - A(t)\sin\left(\phi - \alpha(t)\right)\right)\xi_2,$$

$$\frac{d\xi_2(t)}{dt} = -\nu R^2 \xi_2 - R\left(\frac{df(t)}{dt} - A(t)\sin\left(\phi - \alpha(t)\right)\right)\xi_1.$$

Разумеется, подобно уравнению (8) можно построить суперпозицию произвольного числа синусов и косинусов вместо выражения (11). Это наблюдение является следствием линейности уравнений (9) и линейности преобразуемой функции ψ по пространственным переменным. В частном случае $df(t)/dt = A(t)\sin\left(\phi - \alpha(t)\right)$ находим

$$\psi_1 = A(t)\left(y\sin\alpha(t) + x\cos\alpha(t)\right) + e^{-\nu R^2 t}\left(\xi_1(0)\sin g + \xi_2(0)\cos g\right),$$

где $\xi_{1,2}$ — постоянные интегрирования.

Сравнивая уравнения (8) и (9), видим, что учет вязкости приводит, как следовало ожидать, к появлению дополнительного экспоненциального множителя описывающего диссипацию.

Таким образом, уравнения двумерной гидродинамики несжимаемой жидкости допускают простой алгебраический метод построения точных решений. В данной работе мы ограничились демонстрацией простейших решений отдельно для случаев невязкой и вязкой жидкости. Не вызывает никаких сомнений то, что с помощью вышеописанной методики можно построить множество значительно более сложных и интересных с физической точки зрения решений.

Список литературы

1. *Kato T.* Global solutions of two-dimensional Navier-Stokes and Euler equations // Proc. Symp. Pure Math. 1986. Pt. 2. Vol. 45.
2. *Kato T.* Quasi-linear equations of evolution, with applications to partial differential equastions // Journal of Functional Analysis. 1972. Vol. 9. P. 296.
3. *Kato T.* Spectral theory and differential equastions // Lecture Notes in Mathematics / ed. W.N. Everitt. Berlin, 1975. Vol. 448. P. 25.
4. *Constantin P., Wu J.* The inviscid limit for non-smooth vortivity // Indiana University Mathematics Journal. 1996. № 1. P. 45.
5. *Wu J. J.* The Inviscid Limit of the Complex Ginzburg-Landau Equastion. //Differential Equestions. 1998. Vol. 142. P. 413.
6. *Arnold V.I.* Sur la Geometrie Differentielle des Groupes de Lie de Dimension Infinie et ses Applications a Láľhydrodinamique des Fluides Parfaits //Ann. Inst. Fourier. Grenoble, 1966. Vol. 16. P. 319.
7. *Marsden J.E.* Lectures on mechanics. Navier – Stokes equastions: a mathematical analysis //Lond Math. Soc. Lect. Note. Ser. 174. Cambridge Univ. Press, 1992.
8. *Fridlander S., Vishik M.* Lax pair formulation for the Euler equation. // Phys. Lett. 1990. A. 148(6—7). P. 313—319.
9. *Fridlander S., Vishik M.* An inverse scattering treatment for the flow of an ideal fluid in two dimensions // Nonlinearity. 1993. Vol. 6. P. 231.
10. *Li Y., Yurov A.* Lax pairs and Darboux transformations for Euler equastions. // Studies In Applied Math. 2003. Vol. 111. P. 101—103.
11. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. М., 1986. Т. 6 : Гидродинамика.
12. *Итс А.Р., Рыбин А.В., Салль М.А.* К вопросу о точном интегрировании нелинейного уравнения Шредингера // ТМФ. 1988. № 1. С. 20, 74.

Об авторах

Алла Александровна Юрова — канд. физ.-мат. наук, доц., Калининградский государственный технический университет.
E-mail: yurov@freemail.ru

Артем Валерьянович Юров — д-р физ.-мат. наук, проф., Балтийский федеральный университета им. И. Канта, Калининград.
E-mail: artyom_yurov@mail.ru

Ирина Викторовна Лукиных — асп., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград.
E-mail: luki777@mail.ru

About authors

Alla Yurova — PhD, ass. prof., Kaliningrad State Tehnical University.
E-mail: yurov@freemail.ru

Dr Artyom Yurov — prof., I. Kant Baltic Federal University, Kaliningrad.
E-mail: artyom_yurov@mail.ru

Irina Lukinyh — PHD stud., I. Kant Baltic Federal University, Kaliningrad.
E-mail: luki777@mail.ru